Ad-Soyad: **06.04.2025**

Numara:

<u>SOYUT MATEMATİK II ARA SINAV SORULARI</u>

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}^*$ için $n \in n + m$ olduğunu gösteriniz. (20p)
2. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için
$$a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$$
olduğunu gösteriniz. (20p)
3. i) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $2.5^{3n+2} + 7^{2n+1}$ sayısının 19 ile bölümünden kalanı bulunuz. (10p)

   ii) $\mathbb{Z}_{24}$ ün sıfır bölenlerini, asal kalan sınıflarını ve tersi olan elemanları bulunuz. (10p)
4. $a, b, c \in \mathbb{Z}, c > 0$ olmak üzere
$$a < b \Longrightarrow a < b + c$$
olur mu? Gösteriniz. (20p)
5. i) $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için
$$a|c,\ b|c \text{ ve } (a, b) = d \Longrightarrow ab|cd$$
olur mu? Gösteriniz. (10p)

   ii) $a, b \in \mathbb{Z}$ için $(a, b) = 1 \Longrightarrow (a^2, b) = 1$ olur mu? Gösteriniz. (10p)

BAŞARILAR

NOT: Sınav süreniz 120 dakikadır.

CEVAPLAR

1) $A = \{ n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ için } n \in n+m \} \subset \mathbb{N}$

$A = \mathbb{N}$?

- $0 \in A$?

$\forall m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < m \Rightarrow 0 \in m = 0+m$

$\Rightarrow 0 \in A$

- $\forall n \in A$ için $n^+ \in A$?

$n \in A \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*$ için $n \in n+m$ --- (*)

$n^+ \in A \overset{?}{\Leftrightarrow} \forall m \in \mathbb{N}^*$ için $n^+ \in n^+ + m$

$\left(n \in n+m \Leftrightarrow n^+ \in (n+m)^+ \right)$

$n^+ + m = m + n^+$
$= (m+n)^+$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} n \in n+m \Rightarrow n^+ \in (n+m)^+$

$\Rightarrow n^+ \in n^+ + m$

$\Rightarrow n^+ \in A$

$\therefore A = \mathbb{N}$

2) $a = [m,n]$, $c = [z,t]$ olsun.

$b = [u,v]$

$(\Rightarrow:)$ $a \le b \Rightarrow [m,n] \le [u,v] \Leftrightarrow m+v \le n+u$

$a + c = [m,n] + [z,t] = [m+z, n+t]$

$b + c = [u,v] + [z,t] = [u+z, v+t]$

$m+z+v+t = m+v+z+t \le n+u+z+t = n+t+u+z$

$\Rightarrow m+z+v+t \le n+t+u+z$

$\Rightarrow [m+z, n+t] \le [u+z, v+t]$

$\Rightarrow [m,n] + [z,t] \le [u,v] + [z,t]$

$\Rightarrow a + c \le b + c$

$(\Leftarrow:)$ $a+c \leq b+c$ olsun

$\Rightarrow [m,n]+[z,t] \leq [u,v]+[z,t]$

$\Rightarrow [m+z, n+t] \leq [u+z, v+t]$

$\Rightarrow m+z+v+t \leq n+t+u+z$

$\Rightarrow m+v+z+t \leq n+u+z+t$

$\Rightarrow m+v \leq n+u \Rightarrow [m,n] \leq [u,v]$

$\Rightarrow a \leq b$

3) i) $5^3 = 125 \equiv 11 \pmod{19}$

$\Rightarrow 5^{3n} \equiv 11^n \pmod{19}$

$5^{3n+2} = 5^{3n} \cdot 25 \equiv 11^n \cdot 6 \pmod{19}$

$\Rightarrow 2 \cdot 5^{3n+2} \equiv 12 \cdot 11^n \pmod{19}$ --- ①

$7^2 = 49 \equiv 11 \pmod{19}$

$\Rightarrow 7^{2n} \equiv 11^n \pmod{19}$ -- ②

$\Rightarrow 7^{2n+1} \equiv 7 \cdot 11^n \pmod{19}$

$\left.\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 5^{3n+2} + 7^{2n+1} \equiv 12 \cdot 11^n + 7 \cdot 11^n \pmod{19}$

$\Rightarrow 2 \cdot 5^{3n+2} + 7^{2n+1} \equiv 19 \cdot 11^n \pmod{19}$

$\Rightarrow 2 \cdot 5^{3n+2} + 7^{2n+1} \equiv 0 \pmod{19}$

ii) $\mathbb{Z}_{24} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{23}\}$

$\mathbb{Z}_{24}^* = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}\}$, $\varphi(24) = 24(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) = 8$

$\bar{a}$ sıfır bölen $\Leftrightarrow$ $\bar{a} \notin \mathbb{Z}_{24}^*$

Sıfır bölenler;

$\{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}\}$

$\bar{a} \in \mathbb{Z}_{24}$ tersi var $\Leftrightarrow$ $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{24}^*$

Tersi var olan elemanlar;

$\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}$

4) $a=[x,y]$, $b=[m,n]$, $c=[z,t]$

$c>0 \Rightarrow [z,t]>0 \Rightarrow z>t$
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ni z=t+k$ ....(1)

$a<b \Leftrightarrow [x,y]<[m,n]$
$\Leftrightarrow x+n<y+m$
$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N}^* \ni y+m=x+n+r$ ---(2)

$a<b+c \Leftrightarrow [x,y]<[m,n]+[z,t]$
$\Leftrightarrow [x,y]<[m+z,n+t]$
$\Leftrightarrow x+(n+t)<y+(m+z)$
$\underset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow} x+n+t<x+n+r+t+k$
$\Leftrightarrow (x+n+t)<(x+n+t)+r+k$
$\Leftrightarrow 0<r+k$

$r,k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow r+k>0$ olur.

$\therefore a<b \Rightarrow a<b+c$

5) i) $a|c \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni c=ah$
$b|c \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z} \ni c=bt$
$(a,b)=d \Rightarrow \exists x,y \in \mathbb{Z} \ni ax+by=d$
$ax+by=d \Rightarrow c(ax+by)=cd$
$\Rightarrow cax+cby=cd$
$\Rightarrow btax+akby=cd$
$\Rightarrow ab(\underbrace{tx+ky}_{\in \mathbb{Z}})=cd$
$\Rightarrow ab|cd$

ii) $(a,b)=1 \Rightarrow \exists x,y \in \mathbb{Z} \ni ax+by=1$
$\Rightarrow (ax+by)^2=1 \Rightarrow a^2x^2+2abxy+b^2y^2=1$
$\Rightarrow a^2x^2+b(2axy+by^2)=1$
$\Rightarrow \exists r,s \in \mathbb{Z} \ni a^2r+bs=1$
$\Rightarrow (a^2,b)=1$

$x^2=r$
$2axy+by^2=s$
olsun.